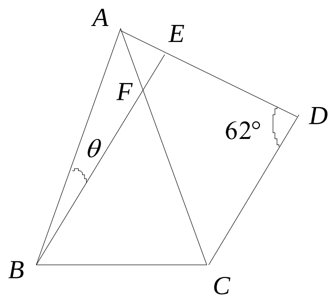
試卷一解答 (2020/21)

解	分	備註
1. $\dfrac{(a^3b^{-2})^4}{a^{-5}}$		
$=\dfrac{a^{12}b^{-8}}{a^{-5}}$	1M	給 $(xy)^m=x^my^m$ 或 $(x^m)^n=x^{mn}$
$=\dfrac{a^{12-(-5)}}{b^8}$	1M	給 $z^{-p}=\dfrac{1}{z^p}$ 或 $\dfrac{z^p}{z^q}=z^{p-q}$
$=\dfrac{a^{17}}{b^8}$	1A	
	--------(3)	
2. (a) $x^2-6xy+9y^2$		
$=(x-3y)^2$	1A	或 $(3y-x)^2$
(b) $x^2-6xy+9y^2-4$		
$=(x-3y)^2-4$	1M	給利用 (a) 的結果
$=(x-3y+2)(x-3y-2)$	1A	或等價
	--------(3)	
3. $5a=3b$		
$a:b=3:5=6:10$	1A	給任何一項
$c=\dfrac{b}{2}$		
$b:c=2:1=10:5$		
$\therefore\ a:b:c=6:10:5$		
設 $a=6k$ ，$b=10k$ ，$c=5k$ ，其中 $k\neq 0$		
代入 $2a+b-3c=14$		
得 $12k+10k-15k=14$	1M	
$7k=14$		
$k=2$		
$\therefore\ c=5k=10$	1A	
	--------(3)	
4. 售價 $=\$160\times(1+10\%)$	1M	
$=\$176$	1A	
標價 $=\$176\div 80\%$	1M	
$=\$220$	1A	
	--------(4)	

解	分	備註
5. 設女會員人數為 x，		
則男會員人數為 $\frac{4}{3}x$ 。	1A	
$x+\frac{4}{3}x=280$	1M+1A	1M 給建立一條一個未知元的線性方程
$\frac{7}{3}x=280$		
$x=120$		
男女會員人數之差 $=\frac{1}{3}\times 120$		
$=40$	1A	
男女會員人數之差 $=280-2\times 120$		
$=40$	1A	
設男女會員人數分別為 x 及 y 。		
則 $x=\frac{4}{3}y$ 及 $x+y=280$	1A+1A	
∴ $\frac{4}{3}y+y=280$	1M	1M 給建立一條一個未知元的線性方程
$\frac{7}{3}y=280$		
$y=120$		
$x=160$		
男女會員人數之差 $=160-120$		
$=40$	1A	
	--------(4)	
6. (a) $6-x>\frac{3-4x}{2}$		
$12-2x>3-4x$ $\quad (6-x>\frac{3}{2}-2x)$		
$-2x+4x>3-12$ $\quad (-x+2x>\frac{3}{2}-6)$	1M	給將 x 放在一邊
$2x>-9$		
∴ $x>-\frac{9}{2}$	1A	
$42-7x\le 0$		
$7x\ge 42$		
$x\ge 6$		
∴ 複合不等式的解為 $x>-\frac{9}{2}$ 。	1A	
(b) 5 個	1A	
	--------(4)	

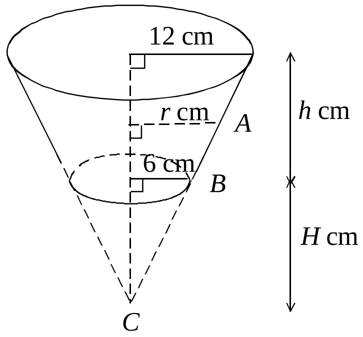
	解	分	備註
7.	(a) A' 的坐標為 $(7,1)$ 。	1A	接受 $A'(7,1)$ 或 $A'=(7,1)$
	B' 的坐標為 $(-4,-4)$ 。	1A	接受 $B'(-4,-4)$ 或 $B'=(-4,-4)$
	(b) AB 的斜率 $=\dfrac{7+4}{-1-4}=-\dfrac{11}{5}$	1M	接受 $m_{AB}=-\dfrac{11}{5}$ 給任何一項
	$A'B'$ 的斜率 $=\dfrac{1+4}{7+4}=\dfrac{5}{11}$		
	$\because$ AB 的斜率 $\times A'B'$ 的斜率 $=(-\dfrac{11}{5})(\dfrac{5}{11})=-1$		
	$\therefore$ $AB\perp A'B'$	1	必須顯示理由
		--------(4)	
8.	$\because$ $AC=AD$		
	$\therefore$ $\angle ACD=\angle ADC=62^\circ$	1M	
	$\because$ $BE//CD$		
	$\therefore$ $\angle AFE=\angle ACD=62^\circ$	1M	
	$\angle BAC=\angle AFE-\theta=62^\circ-\theta$	1A	
	$\because$ $AB=AC$		
	$\therefore$ $\angle ABC=\dfrac{180^\circ-\angle BAC}{2}=\dfrac{180^\circ-(62^\circ-\theta)}{2}=59^\circ+\dfrac{\theta}{2}$	1M	
	$\angle FBC=59^\circ+\dfrac{\theta}{2}-\theta=59^\circ-\dfrac{\theta}{2}$	1A	
		--------(5)	



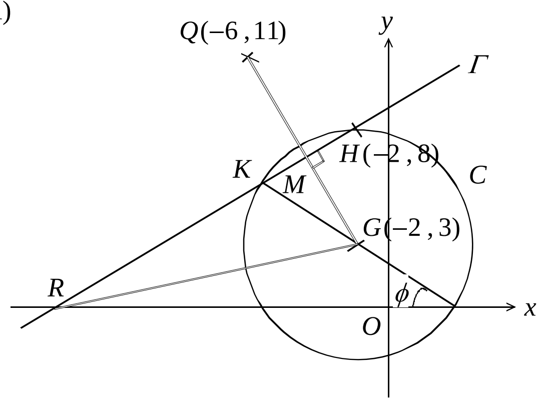
解	分	備註
9. (a) $\dfrac{b}{19+a+b}=\dfrac{1}{8}$ $8b=19+a+b$ $a-7b=-19 \quad ---(1)$	1M	
又 $7+a=12+b$ $a-b=5 \quad ---(2)$	1M	
解 (1)、(2) 兩式，得 $a=9$ ，$b=4$ 。	1A	給兩項正確
(b) 原有的平均值 $=6.40625$ 新的平均值 $=6.375$	1M	給任何一項
平均值下降了 0.03125	1A	接受答案準確至 0.0313
平均值下降了 $\dfrac{1}{32}$ $=0.03125$	1M+1A	1M 給分子
	--------(5)	

解	分	備註
10. (a) $S=aA+bA^2$，其中 a 、 b 為非零常數。	1A	
代入 $A=4$ ， $S=56$ 及 $A=7$ ， $S=140$		
得 $4a+16b=56$	1M	給任何一項代換
$a+4b=14$ ---(1)		
又 $7a+49b=140$		
$a+7b=20$ ---(2)		
解 (1)、(2) 兩式，得 $a=6$ ， $b=2$ 。	1A	給兩項正確
$\therefore$ $S=6A+2A^2$		
當 $A=6$ 時，$S=6\times6+2\times6^2$		
$=\$108$	1A	
	--------(4)	
(b) 當 $A=12$ 時，$S=6\times12+2\times12^2$	1M	
$=\$360$		
$\neq 4\times\$108$		
$=\$432$		
$\therefore$ 該宣稱不正確。	1A	必須顯示理由
	--------(2)	
11. (a) 四分位數間距		
$=128-114$	1M	
$=14\text{(s)}$	1A	
	--------(2)	
(b) (i) $130+b-(100+a)\geq 14+24$	1M	
$b-a\geq 8$		
$\begin{cases}a=0\\b=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0\\b=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=9\end{cases}$	1A	給至少兩項正確
(ii) 當 $a=0$ ， $b=9$ 時有最大可取的標準差。	1M	
最大可取的標準差 ≈ 9.20271699		
$\approx 9.20\text{(s)}$	1A	接受答案準確至 9.20(s)
當 $a=0$ 及 $b=8$ 時， 標準差 $\approx 9.107551812\approx 9.11\text{(s)}$ 當 $a=0$ 及 $b=9$ 時， 標準差 $\approx 9.20271699\approx 9.20\text{(s)}$ 當 $a=1$ 及 $b=9$ 時， 標準差 $\approx 9.089966997\approx 9.09\text{(s)}$		
由於 $9.20>9.11>9.09$	1M	
$\therefore$ 最大可取的標準差 $\approx 9.20\text{(s)}$	1A	r.t. 9.20(s)
	--------(4)	

解	分	備註
12. (a) 利用相似三角形，得		
$\frac{H}{h+H}=\frac{6}{12}$	1M	
$H=h$		
$\frac{1}{3}\pi\times 12^2\times 2h-\frac{1}{3}\pi\times 6^2 h=672\pi$	1M	
$96h-12h=672$		
$84h=672$		
$h=8$	1A	
$\frac{1}{3}\pi\times 6^2 h=672\pi\times\frac{1^3}{2^3-1^3}$	1M	
$12h=96$		
$h=8$	1A	
	--------(3)	
(b) 設水面半徑為 r cm 。		
利用相似三角形，得		
$\frac{6}{r}=\frac{8}{12}$	1M	
$r=9$		
$AC=\sqrt{9^2+12^2}=15$	1M	給任何一項
$BC=\sqrt{6^2+8^2}=10$		
容器被水所濕的面積		
$=\pi\cdot 9\cdot 15-\pi\cdot 6\cdot 10+\pi\times 6^2$	1M	1M 給 $\pi\cdot 9\cdot 15-\pi\cdot 6\cdot 10$
$=111\pi$ (cm^2)	1A	
容器被水所濕的面積		
$=\pi\cdot 9\cdot 15\times\frac{15^2-10^2}{15^2}+\pi\times 6^2$	1M	1M 給 $\pi\cdot 9\cdot 15\times\frac{15^2-10^2}{15^2}$
$=111\pi$ (cm^2)	1A	
	--------(4)	

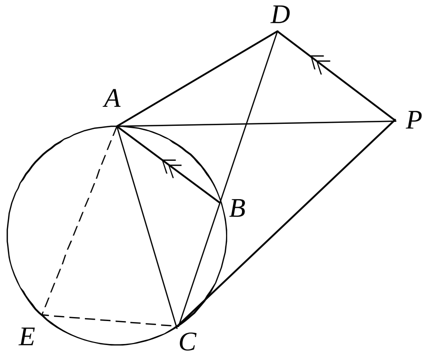


解	分	備註
13. (a) 設 $f(x)=(x^2-1)(ax+b)+4x+k$，其中 a、b 為常數。	1M	$f(x)=(x^2-1)q(x)+4x+k$，
$f(-1)=-4+k=0$	1M	其中 $q(x)$ 為多項式。
$k=4$	1A	
	--------(3)	
(b) $f(x)=(x^2-1)(ax+b)+4x+4$		
由於 $f(0)=-4$	1M	
$\therefore\ -b+4=-4$		
$b=8$	1A	
$\therefore\ f(x)=(x+1)(x-1)(ax+8)+4(x+1)$		
$f(x)=0$		
$(x+1)[(x-1)(ax+8)+4]=0$		
若 $f(x)=0$ 有異於 -1 的重根，		
則 $(x-1)(ax+8)+4=0$ 有重根，	1M	
$ax^2+(8-a)x-4=0$		
$\Delta=(8-a)^2+16a=0$	1M	
$a^2+64=0$		
由於 a 為實數，		
所以方程 $(x-1)(ax+8)+4=0$ 不可能有重根。		
即方程 $f(x)=0$ 不可能有異於 -1 的重根。		
故此，該宣稱正確。	1A	必須顯示理由
	--------(5)	

解	分	備註
14. (a) $C: x^2+y^2+4x-6y-12=0$		
將 $(-2,b)$ 代入 C，得		
$4+b^2-8-6b-12=0$		
$b^2-6b-16=0$		
$(b+2)(b-8)=0$		
$b=-2$ (捨) 或 $b=8$	1A --------(1)	
(b) (i) G 點坐標為 $(-2,3)$		
設 P 點坐標為 (x,y)		
由 $PQ=PG$，得		
$\sqrt{(x+6)^2+(y-11)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$	1M	
$8x-16y+144=0$		
$\Gamma: x-2y+18=0$	1A	或等價
QG 的中點 M 的坐標為 $(-4,7)$		
QG 的斜率 $=\dfrac{11-3}{-6+2}=-2$		
Γ 的斜率 $=\dfrac{1}{2}$		
$\Gamma: \dfrac{y-7}{x+4}=\dfrac{1}{2}$	1M	
$x-2y+18=0$	1A	或等價
$\because -2-2(8)+18=0$		
$\therefore \Gamma$ 通過 H。	1A	必須顯示理由
(ii) 		
留意 M 同時是 QG 及 HK 的中點。		
設 K 點坐標為 (c,d)		
則 $\dfrac{c-2}{2}=-4$，$\dfrac{d+8}{2}=7$		
$c=-6$， $d=6$	1A	給兩項正確

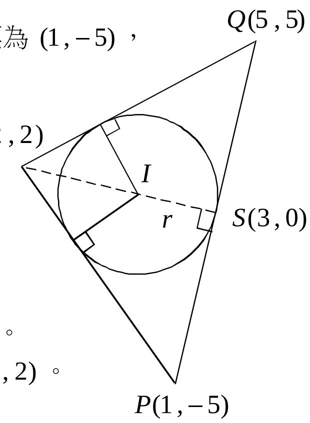
解	分	備註
Γ 的斜率 $=\dfrac{1}{2}$		
$\tan\angle KRO=\dfrac{1}{2}$	1M	
$\angle KRO\approx 26.56505118°$		
直線 KG 的斜率 $=\dfrac{6-3}{-6+2}=-\dfrac{3}{4}$		
$\phi\approx 36.869897565°$		
$\because\ \angle KRG<26.56505118°$	1M	給任何一項
而 $\angle KGR>36.869897565°$		
$\therefore\ \angle KGR>\angle KRG$		
因此，同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
R 點坐標為 $(-18,0)$		
$KR=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{180}$	1M	
$KG=\sqrt{4^2+3^2}=5$		
$\therefore\ KR>KG$	1M	$\angle KRG\approx 15.9453959°$
$\therefore\ \angle KGR>\angle KRG$		$\angle KGR\approx 47.48955292°$
因此，同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
	--------(7)	

解	分	備註
15. (a) 所求概率 $=\dfrac{C_6^7+C_5^7C_1^5+C_4^7C_2^5}{C_6^{12}}$	1M	1M 給分子
$=\dfrac{1}{2}$	1A	
所求概率 $=(\frac{7}{12})(\frac{6}{11})(\frac{5}{10})(\frac{4}{9})(\frac{3}{8})(\frac{2}{7})+(\frac{7}{12})(\frac{6}{11})(\frac{5}{10})(\frac{4}{9})(\frac{3}{8})(\frac{5}{7})\cdot C_1^6$	1M	1M 給 $P_1+P_2+P_3$
$+(\frac{7}{12})(\frac{6}{11})(\frac{5}{10})(\frac{4}{9})(\frac{5}{8})(\frac{4}{7})\cdot C_2^6$		
$=\dfrac{1}{2}$	1A	可以 0.5 作答
	--------(2)	
(b) 所求概率 $=\dfrac{P_3^3\cdot P_3^4}{P_6^6}$	1M+1M	1M 給分子，1M 給分母
$=\dfrac{1}{5}$	1A	
所求概率 $=\dfrac{P_3^3\cdot C_3^4\cdot P_3^3}{P_6^6}$	1M+1M	1M 給分子，1M 給分母
$=\dfrac{1}{5}$	1A	可以 0.2 作答
	--------(3)	
16. (a) 設數列的首項為 a ，公比為 r 。則		
$ar=200 \quad ---(1)$	1M	給任何一項
$\dfrac{a}{1-r}=800 \quad ---(2)$		
$\dfrac{(2)}{(1)}$ 得 $\dfrac{1}{r(1-r)}=4$		
$4r^2-4r+1=0$		
$\therefore\ r=\dfrac{1}{2}$ ， $a=400$	1A	給兩項正確
	--------(2)	
(b) $\dfrac{400[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}>800(1-10^{-10})$	1M	
$1-(\frac{1}{2})^n>1-10^{-10}$		
$(\frac{1}{2})^n<10^{-10}$		
$\log(\frac{1}{2})^n<\log10^{-10}$	1M	
$n\log\frac{1}{2}<-10$		
$n>33.21928095$		
$\therefore\ n$ 的最小值為 34。	1A	
	--------(3)	

解	分	備註
17. 		
(a) $\because$ $AB//DP$ (已知)		
$\therefore$ $\angle DPA = \angle BAP$ (內錯角)		錯角
又 $\angle BAP = \angle ACB$ (交錯弓形的圓周角)		弦切角定理
$\therefore$ $\angle DPA = \angle ACB$ ($\angle ACD$)		
$\therefore$ A、C、P、D 四點共圓 (同弓形內的圓周角的逆定理)		同弧上的圓周角的逆定理 接受 $ACPD$ 為一圓內接四邊形
評分標準：		
情況 1 附有正確理由的任何正確證明。	3	
情況 2 未附有正確理由的任何正確證明。	2	
情況 3 附有一正確理由和一正確步驟之未完整的證明。	1	
	--------(3)	
(同學也可能循以下途徑證明四點共圓 $\angle CDP = \angle ABD = \angle AEC = \angle CAP$)		
(b) $\because$ $ACPD$ 為一圓內接四邊形		
$\therefore$ $\angle PAC = \angle PDC$	1M	
$= \angle DBA$ ($\because$ $AB//DP$)		
又 $\angle DCA = \angle PAB$		
$\therefore$ $\angle PCD + \angle DCA = \angle PAD + \angle PAB$		
即 $\angle PCA = \angle DAB$	1A	
$\therefore$ $\Delta PAC \sim \Delta DBA$		接受同學證明 $\Delta PAC \sim \Delta DAB$
因此，同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
延長 PD 至 Q 。 $\angle PCA = \angle QDA$ $= \angle DAB$	1A	
	--------(3)	

解	分	備註
18. (a) $CB=\frac{3}{2}x$		
$FB=x+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}x$		
$\frac{1}{2}(\frac{5}{2}x)^2-\frac{1}{2}x^2=42$	1M	
$x^2=16$		
$x=4$	1A	
$DC=\sqrt{2}x$ ， $EB=\frac{5\sqrt{2}}{2}x$		
$\frac{(\sqrt{2}x+\frac{5\sqrt{2}}{2}x)\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}x}{2}=42$	1M	
$x^2=16$		
$x=4$	1A	
	--------(2)	
(b) (i) $A'E=AE=10$ ， $DE=6$		
在 $\Delta A'DE$ 中		
$(A'D)^2=10^2+6^2-2(10)(6)\cos 40^\circ$	1M	
$A'D\approx 6.638875419$		
≈ 6.64 (cm)	1A	
(ii) 作 $A'M\perp EB$ 使垂足為 M ，		
又作 $A'N\perp DC$ 使垂足為 N 。		
所求交角為 $\angle A'MN$ (設為 θ)。	1M	
$A'M=10\sin 45^\circ=5\sqrt{2}$		
$DC=4\sqrt{2}$ ， $DN=2\sqrt{2}$		
$(A'N)^2\approx 6.638875419^2-(2\sqrt{2})^2$		
$A'N\approx 6.006219012$		
$MN\approx 6\sin 45^\circ=3\sqrt{2}$		
在 $\Delta A'MN$ 中		
$\cos\theta\approx\frac{(5\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2-6.006219012^2}{2(5\sqrt{2})(3\sqrt{2})}$	1M	
$\theta\approx 57.85329859^\circ$		
$>40^\circ$		
∴ 同意該宣稱。	1A	必須顯示理由
	--------(5)	

解	分	備註
19. (a) $g(x)=\frac{1}{k}x^2-2x+3k-1$		
$=\frac{1}{k}(x^2-2kx)+3k-1$	1A	
$=\frac{1}{k}(x^2-2kx+k^2-k^2)+3k-1$	1M	
$=\frac{1}{k}(x-k)^2+2k-1$		
$y=g(x)$ 的圖像的頂點坐標為 $(k\,,2k-1)$ 。	1A	
	---------(3)	
(b) (i) $y=-g(x+2)$		
P 點坐標為 $(k-2\,,1-2k)$	1A	任何一項正確
$y=g(8-x)$		
Q 點坐標為 $(8-k\,,2k-1)$		
記外心為 $S(3\,,0)$		
由 $PS=RS$ ，得		
$\sqrt{(k-5)^2+(1-2k)^2}=\sqrt{5^2+2^2}$	1M	
$5k^2-14k-3=0$		
$(k-3)(5k+1)=0$		
$\therefore\ k=3$ 或 $k=-\frac{1}{5}$ (捨)	1A	
(ii) 當 $k=3$ 時， P 點坐標為 $(1\,,-5)$ ，		
Q 點坐標為 $(5\,,5)$ 。		
$m_{QR}=\frac{3}{7}$	1M	考慮一種情況
$m_{PR}=-\frac{7}{3}$		
$\because\ m_{QR}\cdot m_{PR}=-1$		
$\therefore\ \angle QRP=90^\circ$		
ΔPQR 為一直角三角形。		
因此，垂心坐標為 $R(-2\,,2)$ 。	1A	
$m_{PQ}=\frac{5}{2}$ ， $m_{RQ}=\frac{3}{7}$ $(m_{PR}=-\frac{7}{3})$		
R 至 PQ 的高的方程為 $\frac{y-2}{x+2}=-\frac{2}{5}$	1M	給任何一項
即 $2x+5y-6=0$ $---(1)$		
P 至 RQ 的高的方程為 $\frac{y+5}{x-1}=-\frac{7}{3}$		Q 至 RP 的高的方程為 $3x-7y+20=0$
即 $7x+3y+8=0$ $---(2)$		
解 (1) 、(2) 兩式得垂心坐標為 $R(-2\,,2)$ 。	1A	



解	分	備註
(iii) 因為 ΔPQR 為一直角三角形， 外心 $S(3, 0)$ 位於斜邊 PQ 的中點上。	1M	
注意， $PR = RQ = \sqrt{58}$ ， PQR 為一直角等腰三角形。		
內心 I 位於垂線 RS 上。	1M	
設內切圓的半徑為 r ， 則 $RI = \sqrt{2}r$	1A	
$\therefore$ 外接圓的半徑 $= RS = (1+\sqrt{2})r$		
因此，同意該學生的宣稱。	1A	必須顯示理由
三角形 PQR 三邊的長度為 $\sqrt{58}$ ，$\sqrt{58}$ 及 $2\sqrt{29}$ 。 該內切圓的半徑為 r ，		
則 $\dfrac{(\sqrt{58}+\sqrt{58}+2\sqrt{29})r}{2} = \dfrac{\sqrt{58}\cdot\sqrt{58}}{2}$	1M	
$r = \dfrac{29}{\sqrt{58}+\sqrt{29}}$	1A	
外接圓的半徑 $= RS$ $= \sqrt{29}$		
$\because$ $\dfrac{RS}{r} = \dfrac{\sqrt{29}}{\dfrac{29}{\sqrt{58}+\sqrt{29}}}$ $= 1+\sqrt{2}$		
$\therefore$ 同意該學生的宣稱。	1A	必須顯示理由
	--------(9)	

2020 / 21 數學 必修部分

試卷二 解答

答案 (打橫看)

B C D B C   A A D D B   C C A D C   D C A A A
B C B C D   B A D B D   C A D B B   A C D A D
B B C A D

1. [B]

$$\frac{(6x^{-5})^{-2}}{4x}=\frac{6^{-2}x^{10}}{4x}$$

$$=\frac{x^9}{36\times 4}$$

$$=\frac{x^9}{144}$$

2. [C]

$$\frac{3a+b}{3a}=2-\frac{b}{a}$$

$$3a+b=6a-3b$$

$$4b=3a$$

$$b=\frac{3a}{4}$$

3. [D]

$$\frac{1}{5+3x}-\frac{1}{5-3x}$$

$$=\frac{5-3x-(5+3x)}{(5+3x)(5-3x)}$$

$$=\frac{-6x}{25-9x^2}$$

$$=\frac{6x}{9x^2-25}$$

4. [B]

$m^2-2m-9n^2+6n$
$=m^2-9n^2-2m+6n$
$=(m+3n)(m-3n)-2(m-3n)$
$=(m-3n)(m+3n-2)$

5. [C]

$\mathrm{f}(x)=3x^2+x+2k$
$\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(k-1)$
$=[3(k+1)^2+(k+1)+2k]-[3(k-1)^2+(k-1)+2k]$
$=3(k+1)^2-3(k-1)^2+2$
$=3k^2+6k+3-3k^2+6k-3+2$
$=12k+2$

6. [A]

$\mathrm{g}(-x)=x^2-ax+b$
$\because\ \ \mathrm{g}(x)=\mathrm{g}(-x)$
$\therefore\ \ x^2+ax+b=x^2-ax+b$
$2ax=0$
$a=0$
$\mathrm{g}(x)=x^2+b$
$\mathrm{g}(-1)=1+b=-3$
$b=-4$
$\mathrm{g}(x)=x^2-4$
所求餘數 $=\mathrm{g}(-2)=4-4=0$

7. [A]

$x^2+(a+b)x\equiv(x+2)(x-3)+b$
$x^2+(a+b)x\equiv x^2-x-6+b$
$\therefore\ \ a+b=-1$ 及 $-6+b=0$
解之得 $b=6$ ， $a=-7$

別解：
$x^2+(a+b)x\equiv(x+2)(x-3)+b$
代入 $x=0$ ，得 $-6+b=0$ ， $b=6$
$x^2+(a+b)x\equiv(x+2)(x-3)+6$
代入 $x=3$ ，得 $9+3(a+6)=6$ ， $a=-7$

8. [D]

$y=-(px+3)^2+q$

$=-p^2(x+\dfrac{3}{p})+q$

頂點為 $(-\dfrac{3}{p},q)$

由於頂點位於第 II 象限，

故 $p>0$ 及 $q>0$ 。

9. [D]

成本 $=160\times 85\%\div(1+8.8\%)$

$=125$

盈利百分率 $=\dfrac{160-125}{125}\times 100\%$

$=28\%$

10. [B]

實際面積 $=4\times 25000^2\ \text{cm}^2$

$=4\times 250^2\ \text{m}^2$

$=2.5\times 10^5\ \text{m}^2$

11. [C]

$t=\dfrac{kp}{\sqrt{q}}$， k 為常數

$p_1=0.65p$ ， $q_1=1.69q$

$t_1=\dfrac{k(0.65p)}{\sqrt{1.69q}}$

$=0.5t$

$\therefore$ t 會減少 50% 。

12. [C]

$-5 < 3-2x < x+6$

由 $-5 < 3-2x$ 得

$-8 < -2x$

$\therefore \quad x < 4$

由 $3-2x < x+6$ 得

$-3x < 3$

$\therefore \quad x > -1$

$\therefore \quad -1 < x < 4$

13. [A]

設 $a_1 = a$ ，則由 $a_3 = 11$ 及 $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$ 。

得 $a_2 = 11-2a$ ， $a_4 = 33-4a$ ， $a_5 = 55-4a$ ，

又 $a_6 = 121-12a$

$\therefore \quad 121-12a = 85$

$12a = 36$

$a = 3$

14. [D]

延長 CB 使之與 FE 交於 N 。

五邊形的面積 $= CDEN$ 的面積 $+ ABNF$ 的面積

$\therefore \quad 3.5\times6.5+(9.5-3.5)\times3.5 \le y < 4.5\times7.5+(10.5-4.5)\times4.5$

即 $43.75 \le y < 60.75$

15. [C]

設扇形原有的半徑及中心角分別為 r 及 θ 。

則新的半徑及中心角分別為 $\frac{5}{4}r$ 及 $(1-k\%)\theta$

$$\therefore \quad \pi r^2 \times \frac{\theta}{360^\circ} = \pi(\frac{5}{4}r)^2 \times \frac{(1-k\%)\theta}{360^\circ}$$

$$1 = \frac{25}{16}(1-k\%)$$

$$1-k\% = \frac{16}{25}$$

$$k = 36$$

16. [D]

相對底為 10 的三角形的斜高為 $\sqrt{12^2+16^2}=20$；

相對底為 32 的三角形的斜高為 $\sqrt{12^2+5^2}=13$。

總表面面積 $=(\frac{10\times 20}{2}+\frac{32\times 13}{2})\times 2+32\times 10$

$=936\ (\text{cm}^2)$

17. [C]

$DE:EC=7:9$

設 ΔDEF 的面積為 $x\ \text{cm}^2$，

則 $\frac{x}{x+32}=\frac{7^2}{9^2}$

$81x=49(x+32)$

$32x=49\times 32$

$x=49$

留意 $AB:DE=AF:FE=2:7$

ΔAFB 的面積 $=49\times\frac{2^2}{7^2}$，

$=4$

ΔDAF 的面積 $=49\times\frac{2}{7}$，

$=14$

$ABCD$ 的面積 $=32+49+4+14$，

$=99\ (\text{cm}^2)$

18. [A]

$\because$ $AB=BC=2CD$

$\therefore$ $AB:BC:CD=2:2:1$

$\because$ $\Delta ABE \sim \Delta ACF$

$\therefore$ $BE:CF=1:2$

$\because$ $\Delta DCG \sim \Delta DBE$

$\therefore$ $CG:BE=1:3$

又 $CG:BE:GF=1:3:5$

梯形 $BCGE$ 與 ΔEFG 同高，

兩面積之比 $=\frac{1+3}{2}:\frac{5}{2}$

$=4:5$

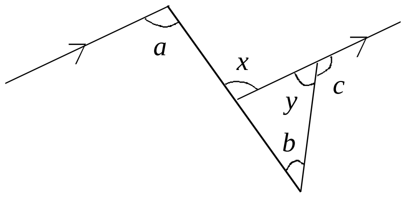
19. [A]

$x = a$

$y = x - b = a - b$

又 $y + c = 180°$

即 $a - b + c = 180°$ (I 成立)



若果 II. 也成立，

則 $2a = 360°$ ， $a = 180°$

故 II. 不成立。

若果 III. 也成立，

則 $2b = 90°$ ， $b = 45°$

故 III. 也非必為正確。

20. [A]

$\because$ $BC = BE$

$\therefore$ $\angle CBE = 180° - 2 \times 56° = 68°$

$\because$ $AB = BC = BE$

$\therefore$ $\angle BAE = \dfrac{180° - (90° + 68°)}{2} = 11°$

$\angle AFD = 11° + 45° = 56°$

21. [B]

連 BD 。

$BD = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

$\because$ $BC^2 + BD^2 = 64 + 225 = 289 = CD^2$

$\therefore$ $\angle CBD = 90°$

$\tan \angle ADB = \dfrac{9}{12}$ ， $\tan \angle DBC = \dfrac{8}{15}$

$\therefore$ $\angle ADB = 36.870°$ ， $\angle DBC = 28.072°$

$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$

$= 36.870° + 28.072°$

$= 64.942°$

$= 65°$

22. [C]

連 CA 及 AE 。

$\because \angle ABC = 90°$

$\therefore$ CA 為圓的直徑 。

$\angle AEC = 90°$

$\angle DCA = 180° - (90° + 36°) = 54°$

設圓心為 X ，

則 $XC = XD = \dfrac{3}{\cos 54°}$

圓的面積 $= \pi \times (\dfrac{3}{\cos 54°})^2 = 81.838 = 82 \ (\text{cm}^2)$

23. [B]

$\angle DEC = \beta$

在 ΔDEC 中， $EC = \dfrac{DC}{\tan\beta}$

在 ΔABC 中， $AC = \dfrac{AB}{\cos\alpha} = \dfrac{DC}{\cos\alpha}$

$\therefore \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{\cos\alpha}{\tan\beta}$

24. [C]

留意 POQ 成一直線，其中 O 為極點。

$\angle ROQ = 350° - 290° = 60°$

ΔPQR 的面積 $= \dfrac{1}{2} \times (5+3) \times 6\sin 60°$

$= 12\sqrt{3}$

25. [D]

I. 顯然成立。

在 $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = 1$ 中，令 $x = 0$ ，得 $y = c$ ；令 $y = 0$ 為，得 $x = b$

$\therefore$ b 及 c 均為負數 。

故 II. 成立。

由 $a < 0$ 及 $b < 0$ ，得 $ab > 0$

又 $b > \dfrac{1}{a}$ ，故 $ab < 1$ （$\because$ $a < 0$）

$\therefore$ III. 也成立。

26. [B]

設 ΔPAB 的高為 h 。

則 $\frac{1}{2}(AB)(h)=20$

由於 AB 為一定值，故 h 為一定值。

$\therefore$ P 的軌跡為一對平行線。

27. [A]

$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

圓心為 (h,k) ，半徑為 r $(r>0)$ 。

由圖知圓心位於第 III 象限 ，

故 $h<0$ 及 $k<0$ 。

又由圖知 $-h>r$ 及 $r>-k$

故 $r+h<0$ 及 $r+k>0$

即 I. 及 II. 成立。

又 $-h>-k$

$k-h>0$

即 III. 不成立。

28. [D]

所求概率 $=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$

29. [B]

顯然 I. 及 III. 成立，而 II. 不成立。

30. [D]

當 $h=9$ 時， A. 不成立。

當 $h=6$ 時， B. 不成立。

當 $h=6$ 時， C. 不成立。

當 $h=9$ 時，數據有最大的四分位數間距，

其值 $=7.5-4=3.5<4$

$\therefore$ D. 必為正確。

31. [C]

$$8^{17}+8^4-8^3$$
$$=(2^3)^{17}+8^3(8-1)$$
$$=2^{51}+7(2^3)^3$$
$$=2^{51}+7(2^9)$$
$$=2^{48}\cdot 2^3+7(2^8\cdot 2)$$
$$=(2^4)^{12}\cdot 8+14(2^4)^2$$
$$=8\times 16^{12}+14\times 16^2$$
$$=8000000000E00_{16}$$

32. [A]

當右方的圖像為 $y=\mathrm{f}(x)$ ，左方的圖像為 $y=-\mathrm{f}(-x)$ 。

33. [D]

$$(\log_a x)^2+4\log_a x^2-18=\log_a x$$
$$(\log_a x)^2+8\log_a x-18=\log_a x$$
$$(\log_a x)^2+7\log_a x-18=0$$
$$(\log_a x+9)(\log_a x-2)=0$$
$\log_a x=-9$ 或 $\log_a x=2$

$x=\dfrac{1}{a^9}$ 或 $x=a^2$

兩根積 $mn=\dfrac{1}{a^9}\cdot a^2=\dfrac{1}{a^7}$

34. [B]

I. 成立，而 II. 不成立。

$AC=-\log_a y$ ， $BC=-\log_b y$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AC-BC}{BC}$$
$$=\frac{AC}{BC}-1$$
$$=\frac{-\log_a y}{-\log_b y}-1$$
$$=\frac{\log_a y}{\frac{\log_a y}{\log_a b}}-1$$
$$=\log_a b-\log_a a$$
$$=\log_a \frac{b}{a}$$

35. [B]

顯然 I. 是等差數列，而 II. 不是等差數列 (它是等比數列)。

$\because\ 7\log\sqrt{a}-3\log\sqrt{a}=4\log\sqrt{a}$

$$3\log\sqrt{a}-\log\frac{1}{\sqrt{a}}=3\log\sqrt{a}-\log(\sqrt{a})^{-1}$$
$$=3\log\sqrt{a}+\log\sqrt{a}$$
$$=4\log\sqrt{a}$$

$\therefore$ III. 是等差數列。

36. [A]

$$(k-2i)(2+ki)^2$$
$$=(k-2i)(4-k^2+4ki)$$
$$=k(4-k^2)+8k-8i+2k^2i+4k^2i$$

實部 $=k(4-k^2)+8k$

$=-k^3+12k$

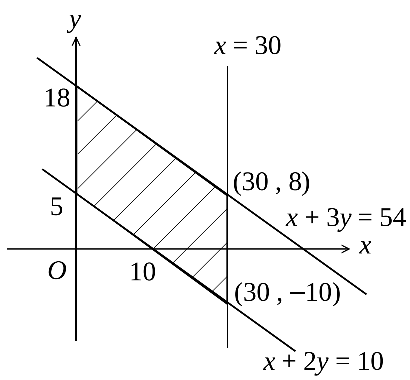
37. [C]

設 $f(x,y)=2x-3y+2$

$f(0,5)=-13$ ， $f(0,18)=-52$

$f(30,8)=38$ ， $f(30,-10)=92$

$f(x,y)$ 的最大值為 92 。



38. [D]

作鉛垂線 XN 交平面 $EFGH$ 於 N，並連 FN 。

則 $FN=\sqrt{b^2+c^2}$ ， $XN=2a$

又 $XF=\sqrt{4a^2+b^2+c^2}$

作 $XM\perp AD$ 使垂足為 M ，並連 MF 。

$MF=\sqrt{4a^2+c^2}$

$\theta=\angle XFM$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{MF}{XF}=\dfrac{\sqrt{4a^2+c^2}}{\sqrt{4a^2+b^2+c^2}}$

39. [A]

連 DC 。

$\angle DCE = \angle BDE = 35°$

$\angle CDE = \angle BCQ = 65°$

$\angle DEC = 180° - 35° - 65° = 80°$

$\angle DBE = 80° - 35° = 45°$

$$\begin{aligned}\angle BFC &= \angle BCQ - \angle DBE \\ &= 65° - 45° \\ &= 20°\end{aligned}$$

40. [D]

$4x + 3y + k = 0$

$y = -\dfrac{4x+k}{3}$

代入 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

得 $x^2 + (-\dfrac{4x+k}{3})^2 + 2x - 2(-\dfrac{4x+k}{3}) - 2 = 0$

$9x^2 + (4x+k)^2 + 18x + 6(4x+k) - 18 = 0$

$25x^2 + (8k+42)x + k^2 + 6k - 18 = 0$

$\Delta = (8k+42)^2 - 100(k^2 + 6k - 18) < 0$

$-36k^2 + 72k + 3564 < 0$

$k^2 - 2k - 99 > 0$

$(k-11)(k+9) > 0$

$\therefore$ $k < -9$ 或 $k > 11$

特解：

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

圓心 $= (-1, 1)$ ，半徑 $= \dfrac{1}{2}\sqrt{4+4+8} = 2$

圓心至直線 $4x + 3y + k = 0$ 的垂直距離 $= \left|\dfrac{4(-1)+3(1)+k}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\dfrac{k-1}{5}\right|$

$\because$ 圓與直線不相交，

$\therefore$ $\left|\dfrac{k-1}{5}\right| > 2$

$\dfrac{k-1}{5} < -2$ 或 $\dfrac{k-1}{5} > 2$

$\therefore$ $k < -9$ 或 $k > 11$

41. [B]

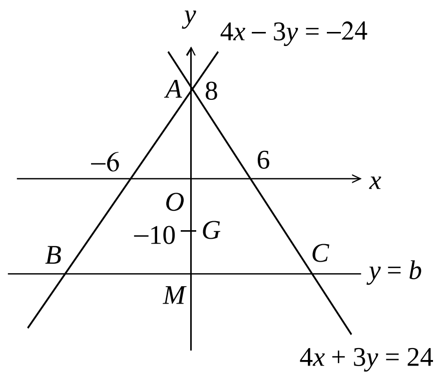
顯然 ABC 為一等腰三角形

形心 G 位於 y 軸上。

$\because$ $AG = 18$

$\therefore$ $GM = 9$

$\therefore$ $b = -10 - 9 = -19$



42. [B]

所求列數 $= C_2^4 \times P_3^6 \times P_2^2 \times P_5^5$

$= 172800$

43. [C]

所求概率 $= \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{4}{9}$

44. [A]

設兩學生的成績為 x_1 及 x_2，且 $x_1 > x_2$。

又設該測驗的平均分為 m。

則兩學生標準分之差

$= \dfrac{x_1 - m}{6} - \dfrac{x_2 - m}{6}$

$= \dfrac{x_1 - x_2}{6}$

$= \dfrac{18}{6}$

$= 3$

45. [D]

未修訂前後 5 數的標準差 = 前 5 數的標準差。

$\therefore$ 修訂後的後 5 數的方差

$= 2^2 \times 2^2$

$= 16$